Министерство образования и науки РФ
ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет»
Факультет математики, информационных и авиационных технологий

Савинов Ю.Г., Веревкин А.Б.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»

по направлению бакалавриата 24.03.04 «Авиастроение»

Ульяновск, 2020

Методические указания для самостоятельной работы студентов по дисциплине «Математический анализ» по направлению бакалавриата 24.03.04 «Авиастроение» / авторы: Савинов Ю.Г., Веревкин А.Б. – Ульяновск: УлГУ, 2020.

Настоящие методические указания предназначены в помощь студентам очной формы обучения по направлению бакалавриата 24.03.04 «Авиастроение» для самостоятельной работы по дисциплине «Математический анализ». В пособии представлена литература по дисциплине, основные темы курса и рекомендации по самостоятельному изучению теоретического и практического материала.

Методические указания будут полезны студентам при подготовке к лекционным и практическим занятиям и промежуточной аттестации по данной дисциплине.

Рекомендовано к введению в образовательный процесс Ученым Советом Факультета математики, информационных и авиационных технологий УлГУ (протокол № 6/19 от 22 сентября 2020 г.).

1. ЛИТЕРАТУРА ДЛЯ ИЗУЧЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

1. Зорич, В.А. Математический анализ : учебник для ун-тов. Ч. 1 / В.А. Зорич. – М. : Наука, 1981. – 544 с.
2. Зорич, В.А. Математический анализ : учебник для ун-тов. Ч. 2 / В.А. Зорич. – М. : Наука, 1984. – 640 с.
3. Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу : учебное пособие для вузов / Б.П. Демидович. – М. : Наука, 1990. – 624 с. – ISBN 5-02-014505-Х.
4. Виноградова, И.А. Математический анализ в задачах и упражнениях : учебное пособие для вузов / И.А. Виноградова, С.Н. Олехник, В.А. Садовничий. – М. : МГУ, 1991. – 352 с. – ISBN 5-211-01559-2.
5. Штраус, Л.А. Пределы: методические указания для студентов факультета математики и информационных технологий и факультета управления / Л.А. Штраус, И.В. Баринова. – Ульяновск : УлГУ, 2012. – 32 с. – URL: ftp://10.2.96.134/Text/Shtraus1.pdf.
6. Штраус, Л.А. Дифференцирование и исследование функций : учебно-методические указания / Л.А. Штраус, И.В. Баринова. – Ульяновск : УлГУ, 2010. – 30 с. – URL: ftp://10.2.5.225/FullText/Text/Shtraus.pdf.
7. Кемер, А.Р. Интегралы: учебно-методическое пособие. Ч. 1 : Неопределенный интеграл / А.Р. Кемер. – Ульяновск : УлГУ, 2011. – 38 с.
8. Кемер, А.Р. Числовые и функциональные ряды : учебно-методическое пособие для информ. специальностей / А.Р. Кемер. – Ульяновск : УлГУ, 2007. – 63 с. – URL: ftp://10.2.5.225/FullText/Text/kemer.pdf.

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

1) Раздел 1. Введение в математический анализ

Тема 1. *Множества и функции.*
С темой можно ознакомиться в следующих источниках:
1. Зорич, В.А. Математический анализ : учебник для ун-тов. Ч. 1 / В.А. Зорич. – М. : Наука, 1981. – 544 с.: С. 17–22 чтение теории, С. 22–23 решение задач; С. 23–34 чтение теории, С. 34–36 решение задач.
2. Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу : учебное пособие для вузов / Б.П. Демидович. – М. : Наука, 1990. – 624 с. – ISBN 5-02-014505-Х: С. 26–27 чтение теории, С. 27–34 решение задач; С. 35 чтение теории, С. 35–47 решение задач.

Тема 2. *Поле действительных чисел.*
С темой можно ознакомиться в следующих источниках:
1. Зорич, В.А. Математический анализ : учебник для ун-тов. Ч. 1 / В.А. Зорич. – М. : Наука, 1981. – 544 с.: С. 44–75 чтение теории, С. 75–79 решение задач; С. 79–81 чтение теории, С. 81–82 решение задач; С. 82–85 чтение теории, С. 85–86 решение задач.
2. Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу : учебное пособие для вузов / Б.П. Демидович. – М. : Наука, 1990. – 624 с. – ISBN 5-02-014505-Х: С. 7–8 чтение теории, С. 8–12 решение задач.

Тема 3. *Предел последовательности.*
С темой можно ознакомиться в следующих источниках:
1. Зорич, В.А. Математический анализ : учебник для ун-тов. Ч. 1 / В.А. Зорич. – М. : Наука, 1981. – 544 с.: С. 87–104 чтение теории, С. 114–117 решение задач.
2. Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу : учебное

пособие для вузов / Б.П. Демидович. – М. : Наука, 1990. – 624 с. – ISBN 5-02-014505-X: С. 12–13 чтение теории, С. 13–26 решение задач.
3. Штраус, Л.А. Пределы: методические указания для студентов факультета математики и информационных технологий и факультета управления / Л.А. Штраус, И.В. Баринова. – Ульяновск : УлГУ, 2012. – 32 с. – URL: ftp://10.2.96.134/Text/Shtraus1.pdf: С. 4–14 решение задач.

Тема 4. *Предел функции.*
С темой можно ознакомиться в следующих источниках:
1. Зорич, В.А. Математический анализ : учебник для ун-тов. Ч. 1 / В.А. Зорич. – М. : Наука, 1981. – 544 с.: С. 117–157 чтение теории, С. 157–159 решение задач.
2. Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу : учебное пособие для вузов / Б.П. Демидович. – М. : Наука, 1990. – 624 с. – ISBN 5-02-014505-X: С. 47–49 чтение теории, С. 49–72 решение задач; С. 72–73 чтение теории, С. 73–77 решение задач.
3. Штраус, Л.А. Пределы: методические указания для студентов факультета математики и информационных технологий и факультета управления / Л.А. Штраус, И.В. Баринова. – Ульяновск : УлГУ, 2012. – 32 с. – URL: ftp://10.2.96.134/Text/Shtraus1.pdf: С. 14–26 решение задач.

Тема 5. *Непрерывные функции.*
С темой можно ознакомиться в следующих источниках:
1. Зорич, В.А. Математический анализ : учебник для ун-тов. Ч. 1 / В.А. Зорич. – М. : Наука, 1981. – 544 с.: С. 160–178 чтение теории, С. 179–181 решение задач.
2. Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу : учебное пособие для вузов / Б.П. Демидович. – М. : Наука, 1990. – 624 с. – ISBN 5-02-014505-X: С. 77–78 чтение теории, С. 78–87 решение задач; С. 87 чтение теории, С. 88–90 решение задач; С. 90 чтение теории, С. 91–95 решение задач.
3. Штраус, Л.А. Пределы: методические указания для студентов факультета математики и информационных технологий и факультета управления / Л.А. Штраус, И.В. Баринова. – Ульяновск : УлГУ, 2012. – 32 с. – URL: ftp://10.2.96.134/Text/Shtraus1.pdf: С. 27–32 решение задач.

Контрольные вопросы по разделу

1. Дать определение множества, ограниченного множества, замкнутого множества.
2. Дать определение функции, ее области определения и множества значений и обратной функции.
3. Дать определение натуральным, целым, рациональным, иррациональным, вещественным числам.
4. Дать определение абсолютной величины числа, верхней и нижней грани.
5. Используя логическую символику, записать следующие высказывания и их отрицания:
   а) число a есть предел последовательности (x_n);
   б) последовательность (x_n) бесконечно большая;
   в) последовательность (x_n) ограниченная.
6. Привести пример последовательности:
   а) ограниченной сверху;
   б) ограниченной снизу;
   в) ограниченной;
   г) неограниченной.
7. Может ли быть ограниченной последовательностью:
   а) сумма двух неограниченных последовательностей;
   б) произведение двух неограниченных последовательностей;

в) произведение ограниченной и неограниченной последовательностей;

г) частное двух неограниченных последовательностей?

8. Может ли быть неограниченной последовательностью:

а) произведение ограниченной и неограниченной последовательностей;

б) частное двух ограниченных последовательностей?

9. Может ли быть монотонной последовательностью:

а) сумма двух немонотонных последовательностей;

б) произведение двух немонотонных последовательностей?

10. Может ли функция не иметь предела в точке?
11. Может ли функция иметь разные левосторонние и правосторонние пределы в точке?
12. Может ли функция не иметь односторонних пределов в данной точке?
13. Является ли бесконечно малая функция ограниченной?
14. Является ли произведение бесконечно малых функций бесконечно малой функцией?
15. Является ли произведение двух бесконечно больших функций бесконечно большой?
16. Является ли сумма бесконечно больших функций бесконечно большой функцией?
17. Является ли сумма бесконечно малой и ограниченной функций бесконечно малой функцией?
18. Является ли сумма бесконечно большой и ограниченной функций бесконечно большой функцией?
19. Является ли частное бесконечно малых функций бесконечно малой функцией?
20. Привести пример двух разрывных в точке x_0 функций $f(x)$ и $g(x)$, таких, что их сумма будет непрерывной в точке x_0.
21. Привести пример двух разрывных в точке x_0 функций $f(x)$ и $g(x)$, таких, что их произведение будет функцией, непрерывной в точке x_0.
22. Функции $p(x)$ и $k(x)$ разрывны в точке x_0, $f(x) = p(x) + k(x)$. Можно ли утверждать, что функция $f(x)$ разрывна в точке x_0?
23. Функция $p(x)$ непрерывна в точке x_0, функция $k(x)$ в ней разрывна, $f(x) = p(x) + k(x)$. Можно ли утверждать, что функция $f(x)$ разрывна в точке x_0?
24. Привести пример функции, непрерывной и неограниченной на данном интервале.
25. Привести пример функции, заданной на отрезке и неограниченной на этом отрезке.

Задачи для самостоятельной работы по разделу

1. С помощью метода математической индукции доказать, что для любого натурального n справедливы следующие утверждения:

а) $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$;

б) $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=(1+2+3+\ldots+n)^2$;

в) $7^n + 5$ делится на 6 без остатка.

2. Определить области существования и множества значений следующих функций:

а) $y=\sqrt{2+x-x^2}$; б) $y=\ln(1-2\cos x)$; в) $y=\arccos(2\sin x)$; г) $y=\arcsin(\ln x)$; д) $y=(-1)^x$.

3. Пользуясь определением предела последовательности, доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{o}_n = a$, если:

а) $x_n = \dfrac{2n+3}{4-3n}$, $a = -\dfrac{2}{3}$; б) $x_n = \dfrac{n^2}{n^2+3}$, $a = 1$; указать номер N_ε.

4. Найти предел последовательности:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3-100n^2+1}{100n^2+5n}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n}\right)$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-2+3-4+...-2n}{n\sqrt{n^2+1}}$; г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+3^2+...+n^2}{n^3}$;

д) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+1)^4-(n-1)^4}{(2n+1)^4+(n-1)^4}$; е) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}+...+\dfrac{1}{\sqrt{2n}}$.

5. Используя (ε - δ) определение предела функции в точке, доказать, что:

а) $\lim\limits_{x\to 0}(3x-2)=-2$; б) $\lim\limits_{\tilde{o}\to 3}\tilde{o}^2=9$; в) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{1}{\tilde{o}}=\dfrac{1}{5}$. Указать $\delta(\varepsilon)$.

6. Найти предел функции:

а) $\lim\limits_{\tilde{o}\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^3-2x^2+x-2}$; б) $\lim\limits_{\tilde{o}\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$; в) $\lim\limits_{\tilde{o}\to 0}\dfrac{x\cdot\sin 3x}{1-\cos 4x}$; г) $\lim\limits_{\tilde{o}\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{x-\sin^3 x}{\cos^2 x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x-10}\right)^{x-3}$; е) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+5x}{1+x}\right)^{\frac{7}{x}}$; ж) $\lim\limits_{\tilde{o}\to 0}\dfrac{\ln^2(1+7x)}{\sin 4x^2}$; з) $\lim\limits_{\tilde{o}\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{\sin 4x}$.

7. Исследовать функцию на непрерывность:

а) $f(x)=e^{\frac{1}{x+1}}$; б) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-4}$; в) $f(x)=\dfrac{1}{\ln|x|}$; г) $f(x)=\dfrac{1-\cos^2 x}{x^2}$; д) $f(x)=\dfrac{\mathrm{tg}x}{x}$;

установить характер разрыва.

2) Раздел 2. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Тема 6. *Дифференцируемые функции.*

С темой можно ознакомиться в следующих источниках:

1. Зорич, В.А. Математический анализ : учебник для ун-тов. Ч. 1 / В.А. Зорич. – М. : Наука, 1981. – 544 с.: С. 182–200 чтение теории, С. 200–201 решение задач; С. 201–221 чтение теории, С. 221 решение задач.
2. Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу : учебное пособие для вузов / Б.П. Демидович. – М. : Наука, 1990. – 624 с. – ISBN 5-02-014505-X: С. 96–97 чтение теории, С. 98–114 решение задач; С. 114–115 чтение теории, С. 115–116 решение задач; С. 117 чтение теории, С. 117–120 решение задач; С. 120–121 чтение теории, С. 121–124 решение задач; С. 124–125 чтение теории, С. 125–134 решение задач.
3. Штраус, Л.А. Дифференцирование и исследование функций : учебно-методические указания / Л.А. Штраус, И.В. Баринова. – Ульяновск : УлГУ, 2010. – 30 с. – URL: ftp://10.2.5.225/FullText/Text/Shtraus.pdf: С. 4–14 решение задач.

Тема 7. *Основные теоремы дифференциального исчисления.*

С темой можно ознакомиться в следующих источниках:

1. Зорич, В.А. Математический анализ : учебник для ун-тов. Ч. 1 / В.А. Зорич. – М. : Наука, 1981. – 544 с.: С. 221–239 чтение теории, С. 239–242 решение задач; С. 256–258 чтение теории.
2. Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу : учебное пособие для вузов / Б.П. Демидович. – М. : Наука, 1990. – 624 с. – ISBN 5-02-014505-X:

С. 134 чтение теории, С. 134–140 решение задач; С. 147–148 чтение теории, С. 148–151 решение задач; С. 151–152 чтение теории, С. 152–156 решение задач.

Тема 8. *Исследование функций с помощью производных. Построение графика функции.*
С темой можно ознакомиться в следующих источниках:
1. Зорич, В.А. Математический анализ : учебник для ун-тов. Ч. 1 / В.А. Зорич. – М. : Наука, 1981. – 544 с.: С. 242–256, 258–268 чтение теории, С. 268–271 решение задач.
2. Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу : учебное пособие для вузов / Б.П. Демидович. – М. : Наука, 1990. – 624 с. – ISBN 5-02-014505-X: С. 140 чтение теории, С. 140–144 решение задач; С. 144 чтение теории, С. 144–146 решение задач; С. 156–157 чтение теории, С. 157–161 решение задач; С. 161 чтение теории, С. 161–167 решение задач.
3. Штраус, Л.А. Дифференцирование и исследование функций : учебно-методические указания / Л.А. Штраус, И.В. Баринова. – Ульяновск : УлГУ, 2010. – 27 с. – URL: ftp://10.2.5.225/FullText/Text/Shtraus.pdf: С. 14–28 решение задач.

Контрольные вопросы по разделу

1. Является ли существование производной необходимым условием дифференцируемости функции?
2. Является ли существование производной достаточным условием дифференцируемости функции?
3. Сформулируйте необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции.
4. Является ли непрерывность функции необходимым условием ее дифференцируемости?
5. Является ли непрерывность функции достаточным условием ее дифференцируемости?
6. Приведите примеры функций, дифференцируемых и не дифференцируемых в точке.
7. Сформулировать теоремы Ферма, Ролля и Лагранжа о конечном приращении.
8. Функция дифференцируема на промежутке и монотонна. Что можно сказать о ее производной?
9. Функция имеет на отрезке положительную производную. Что можно сказать о ее монотонности?
10. Функция строго монотонна на отрезке. Может ли ее производная на этом отрезке обращаться в ноль?
11. Может ли функция в точке экстремума быть недифференцируемой?
12. Пусть функция в точке x_0 имеет минимум. Верно ли, что ее производная в этой точке равна нулю?
13. Пусть функция в точке x_0 имеет минимум. Верно ли, что она дифференцируема в этой точке?
14. Пусть функция в точке x_0 имеет минимум. Верно ли, что если она непрерывна в этой точке, то ее производная в этой точке равна нулю?
15. Пусть функция в точке x_0 имеет минимум. Верно ли, что если она дифференцируема в этой точке, то ее производная в этой точке равна нулю?

Задачи для самостоятельной работы по разделу

1. Пользуясь определением, вычислить производные следующих функций:

а) $\acute{o} = 3x+5$; б) $y = \tilde{o}^2 - 4x + 3$; в) $\acute{o} = \sqrt[3]{x}$; г) $\acute{o} = x\sqrt{\ln\left(1+x^2\right)}$.

2. Найти производные следующих функций:

а) $\acute{o} = \sqrt{x}\left(x^5 + \sqrt{x} - 2\right)$; б) $\acute{o} = \mathrm{tg}^3(7x-2)$; в) $\acute{o} = 5^{-x^2}$; г) $\acute{o} = e^{\sqrt{x}}$;

д) $y=\dfrac{x^2-x+2}{x^3+4}$; е) $y=\cos\dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$; ж) $y=\ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$; з) $y=\ln\left(\dfrac{2}{x+2}\right)$;

и) $y=(\sin 7x)^{arctg(3x-5)}$; к) $y=(\operatorname{tg}\sin x)^{\ln(3x+2)}$.

3. Вычислить приближенно с помощью производной:

а) arcsin0.591; б) $\sqrt[3]{121}$; в) sin 29°; г) $\sqrt{24}$.

4. Найти пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(2x^2+1\right)}{3x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}+\ln(x+1)-1}{3x}$; в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{(\pi-2x)^2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1-x^2\right)+5x^2}{x^2}$.

5. Исследовать методами дифференциального исчисления данные функции и построить их графики:

а) $f(x)=\dfrac{x^2-2x+3}{x+2}$; б) $f(x)=\dfrac{x}{(1+x)(1-x)^2}$; в) $f(x)=\dfrac{(x-2)^3}{x^2-4x-12}$; г) $f(x)=\dfrac{x^2(x-1)}{x^2+2x+1}$.

3) Раздел 3. Интегральное исчисление функций одной переменной

Тема 9. *Первообразные и неопределенный интеграл.*

С темой можно ознакомиться в следующих источниках:

1. Зорич, В.А. Математический анализ : учебник для ун-тов. Ч. 1 / В.А. Зорич. – М. : Наука, 1981. – 544 с.: С. 313–329 чтение теории, С. 330–334 решение задач.
2. Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу : учебное пособие для вузов / Б.П. Демидович. – М. : Наука, 1990. – 624 с. – ISBN 5-02-014505-X: С. 172–173 чтение теории, С. 173–203 решение задач.
3. Кемер, А.Р. Интегралы: учебно-методическое пособие. Ч. 1 : Неопределенный интеграл / А.Р. Кемер. – Ульяновск : УлГУ, 2011. – 38 с.: С. 3–38 решение задач.

Тема 10. *Определенный интеграл Римана.*

С темой можно ознакомиться в следующих источниках:

1. Зорич, В.А. Математический анализ : учебник для ун-тов. Ч. 1 / В.А. Зорич. – М. : Наука, 1981. – 544 с.: С. 335–348 чтение теории, С. 352–353 решение задач; С. 353–363 чтение теории, С. 363–364 решение задач; С. 365–376 чтение теории, С. 376–379 решение задач.
2. Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу : учебное пособие для вузов / Б.П. Демидович. – М. : Наука, 1990. – 624 с. – ISBN 5-02-014505-X: С. 204–205 чтение теории, С. 205–208 решение задач; С. 208–209 чтение теории, С. 209–219 решение задач; С. 219–220 чтение теории, С. 220–223 решение задач; С. 244 чтение теории, С. 244–245 решение задач.

Тема 11. *Длина и мера числовых подмножеств.*

С темой можно ознакомиться в следующих источниках:

1. Зорич, В.А. Математический анализ : учебник для ун-тов. Ч. 1 / В.А. Зорич. – М. : Наука, 1981. – 544 с.: С. 348–351 чтение теории, С. 352 решение задач.

Тема 12. *Геометрические приложения интеграла*.
С темой можно ознакомиться в следующих источниках:
1. Зорич, В.А. Математический анализ : учебник для ун-тов. Ч. 1 / В.А. Зорич. – М. : Наука, 1981. – 544 с.: С. 379–395 чтение теории, С. 395–396 решение задач.
2. Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу : учебное пособие для вузов / Б.П. Демидович. – М. : Наука, 1990. – 624 с. – ISBN 5-02-014505-X: С. 230–231 чтение теории, С. 231–234 решение задач; С. 234 чтение теории, С. 234–236 решение задач; С. 236 чтение теории, С. 236–238 решение задач; С. 239 чтение теории, С. 239–240 решение задач; С. 240 чтение теории, С. 240–244 решение задач.

Тема 13. *Несобственные интегралы*.
С темой можно ознакомиться в следующих источниках:
1. Зорич, В.А. Математический анализ : учебник для ун-тов. Ч. 1 / В.А. Зорич. – М. : Наука, 1981. – 544 с.: С. 396–409 чтение теории, С. 409–411 решение задач.
2. Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу : учебное пособие для вузов / Б.П. Демидович. – М. : Наука, 1990. – 624 с. – ISBN 5-02-014505-X: С. 223–224 чтение теории, С. 224–230 решение задач.

Контрольные вопросы по разделу

1. Сформулировать определение первообразной функции, неопределенного интеграла и определенного интеграла Римана.
2. Перечислить и доказать основные свойства неопределенного интеграла.
3. Доказать формулу интегрирования по частям для определенного интеграла Римана.
4. Дать определение числовых множеств нулевой длины, нулевой меры.
5. Сформулировать, в каких геометрических задачах применяется определенный интеграл Римана, выписать формулы.
6. Дать определение несобственного интеграла первого и второго рода.
7. Привести пример непрерывной на луче $[1; +\infty)$ функции, для которой несобственный интеграл на этом промежутке а) сходится; б) расходится.
8. Привести пример неограниченной в полуинтервале $[1; b)$ функции, для которой несобственный интеграл на этом промежутке а) сходится; б) расходится.
9. Сформулировать критерий Коши сходимости несобственных интегралов.
10. Сформулировать признаки Абеля и Дирихле сходимости несобственных интегралов.
11. Сформулировать признаки абсолютной сходимости несобственных интегралов.

Задачи для самостоятельной работы по разделу

1. Найти неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{dx}{5\sqrt{x}-x}$; б) $\int \frac{\sqrt[9]{\ln^{10} x}}{x}dx$; в) $\int \frac{\sin x\,dx}{\cos x\sqrt{\cos^3 x}}$; г) $\int e^{\sqrt{x}}dx$; д) $\int x^{10}\ln x\,dx$; е) $\int \sin(\ln x)dx$;

ж) $\int x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)dx$; з) $\int \frac{x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}}dx$.

2. Найти определенные интегралы Римана:

а) $\int_{-1}^{1}\frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$; б) $\int_{4}^{9}\frac{dx}{\sqrt{x}(x-1)}$; в) $\int_{0}^{27}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}+1}$; г) $\int_{0}^{1}\frac{arcsin\left(\sqrt{x}\right)dx}{\sqrt{x(1-x)}}$; д) $\int_{0}^{\ln 2} xe^{-x}dx$; е) $\int_{0}^{2\pi} x^2\cos x dx$.

3. Ответить на следующие вопросы, привести примеры:
а) может ли равняться нулю мера множества, которое содержит хотя бы одну внутреннюю точку?
б) можно ли на отрезке [-1 ; 1] построить замкнутое множество, мера которого равна двум, но которое отлично от всего отрезка [-1 ; 1]?
в) верно ли, что объединение (пересечение) любого числа измеримых множеств является измеримым множеством?

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:
а) $y = x^2,\ x = y^2$; б) $y = 2x - x^2,\ x + y = 0$; в) $y = \sqrt{x},\ y = 6 - x,\ y = 0$;
г) $y = -x^2 - 2x + 3,\ x^2 - 1$.

5. Найти объемы тел, ограниченных следующими поверхностями:
а) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ z = \frac{c}{a}x,\ z = 0$; б) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$; в) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{z^2} = 1,\ 0 < z < a$.

6. Найти несобственные интегралы первого и второго рода:
а) $\int\limits_{-\infty}^{0} xe^{-\frac{x^2}{4}}dx$; б) $\int\limits_{5}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - 1}$; в) $\int\limits_{0}^{\frac{1}{e}} \frac{dx}{x\ln^4 x}$; г) $\int\limits_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}$; д) $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{\sqrt[5]{\sin^2 x}}$; е) $\int\limits_{1}^{2} \frac{(2x+1)dx}{\sqrt{x^2 + x - 2}}$.

4) Раздел 4. Ряды

Тема 14. *Числовые ряды.*
С темой можно ознакомиться в следующих источниках:
1. Зорич, В.А. Математический анализ : учебник для ун-тов. Ч. 1 / В.А. Зорич. – М. : Наука, 1981. – 544 с.: С. 104–114 чтение теории, С. 116–117 решение задач.
2. Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу : учебное пособие для вузов / Б.П. Демидович. – М. : Наука, 1990. – 624 с. – ISBN 5-02-014505-X: С. 246–247 чтение теории, С. 247–259 решение задач; С. 259–260 чтение теории, С. 260–267 решение задач; С. 267 чтение теории, С. 267–268 решение задач; С. 300–301 чтение теории, С. 301–306 решение задач; С. 307–308 чтение теории, С. 308–314 решение задач.
3. Кемер, А.Р. Числовые и функциональные ряды : учебно-методическое пособие для информ. специальностей / А.Р. Кемер. – Ульяновск : УлГУ, 2007. – 63 с. – URL: ftp://10.2.5.225/FullText/Text/kemer.pdf: С. 3–17 чтение теории.

Тема 15. *Функциональные последовательности и ряды.*
С темой можно ознакомиться в следующих источниках:
1. Зорич, В.А. Математический анализ : учебник для ун-тов. Ч. 2 / В.А. Зорич. – М. : Наука, 1984. – 640 с.: С. 355–363 чтение теории, С. 363 решение задач; С. 363–372 чтение теории, С. 373 решение задач; С. 373–387 чтение теории, С. 387–390 решение задач.
2. Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу : учебное пособие для вузов / Б.П. Демидович. – М. : Наука, 1990. – 624 с. – ISBN 5-02-014505-X: С. 268–270 чтение теории, С. 270–281 решение задач; С. 281–283 чтение теории, С. 283–294 решение задач.
3. Кемер, А.Р. Числовые и функциональные ряды : учебно-методическое пособие для информ. специальностей / А.Р. Кемер. – Ульяновск : УлГУ, 2007. – 63 с. – URL: ftp://10.2.5.225/FullText/Text/kemer.pdf: С. 17–42 чтение теории.

Тема 16. *Ряды Фурье.*
С темой можно ознакомиться в следующих источниках:
1. Зорич, В.А. Математический анализ : учебник для ун-тов. Ч. 2 / В.А. Зорич. – М. : Наука, 1984. – 640 с.: С. 488–510 чтение теории, С. 510–515 решение задач; С. 515–542 чтение теории, С. 542–550 решение задач; С. 551–577 чтение теории, С. 577–583 решение задач.
2. Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу : учебное пособие для вузов / Б.П. Демидович. – М. : Наука, 1990. – 624 с. – ISBN 5-02-014505-X: С. 294–295 чтение теории, С. 295–300 решение задач.
3. Кемер, А.Р. Числовые и функциональные ряды : учебно-методическое пособие для информ. специальностей / А.Р. Кемер. – Ульяновск : УлГУ, 2007. – 63 с. – URL: ftp://10.2.5.225/FullText/Text/kemer.pdf: С. 42–61 чтение теории.

Контрольные вопросы по разделу

1. Дать определение числового ряда, частичной суммы числового ряда, суммы числового ряда, знакоположительного ряда, знакочередующегося ряда.
2. Привести примеры сходящихся и расходящихся числовых рядов.
3. Сформулировать достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами: признак Даламбера, признаки Коши.
4. Сформулировать признак Лейбница сходимости знакочередующихся рядов.
5. Дать определение абсолютной и условной сходимости числовых рядов.
6. Дать определение функционального ряда, его поточечной и равномерной сходимости.
7. Дать определение степенного ряда, радиуса сходимости, интервала сходимости, области сходимости.
8. Дать определение кусочно-монотонной на [a; b] функции, периодической функции, ряда Фурье, интеграла Фурье.

Задачи для самостоятельной работы по разделу

1. Найти сумму числового ряда:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-2)^n$;

ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)$.

2. Исследовать числовые ряды на сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{\sqrt{n^2+2n}-n}{\pi}\right)$; в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}\sin n}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}\sin n}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^{n-1}}$;

ж) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{4^{2n-1}\cdot n!}$; з) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5^n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}$; и) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n+7}}{(n-2)!}\sin\left(\frac{1}{3^n}\right)$.

3. Найти области сходимости степенных рядов:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{n^3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{\sqrt[3]{n}}$; в) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{\ln n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-x)^n}{2^n\cdot\sqrt{n}}$.

4. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $y = f(x)$, аналитическое выражение которой задано на промежутке длиной, равной периоду:

а) $f(x)=\begin{cases}-2, x\in[-\pi;0)\\ 1, x\in[0;\pi)\end{cases}$; б) $f(x)=\begin{cases}0, x\in[-\pi;0)\\ x+1, x\in[0;\pi)\end{cases}$; в) $f(x)=\begin{cases}1-2x, x\in[-\pi;0)\\ 2, x\in[0;\pi)\end{cases}$.

5) Раздел 5. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

Тема 17. *Вещественные пространства и топология.*
С темой можно ознакомиться в следующих источниках:
1. Зорич, В.А. Математический анализ : учебник для ун-тов. Ч. 1 / В.А. Зорич. – М. : Наука, 1981. – 544 с.: С. 412–418 чтение теории, С. 419 решение задач.

Тема 18. *Вектор-функции многих переменных.*
С темой можно ознакомиться в следующих источниках:
1. Зорич, В.А. Математический анализ : учебник для ун-тов. Ч. 1 / В.А. Зорич. – М. : Наука, 1981. – 544 с.: С. 430–435 чтение теории, С. 450 решение задач.

Тема 19. *Пределы, непрерывность, частные производные и дифференциалы.*
С темой можно ознакомиться в следующих источниках:
1. Зорич, В.А. Математический анализ : учебник для ун-тов. Ч. 1 / В.А. Зорич. – М. : Наука, 1981. – 544 с.: С. 419–429 чтение теории, С. 429 решение задач; С. 435–449 чтение теории, С. 450–454 решение задач; С. 454–473 чтение теории, С. 473–479 решение задач; С. 479–491 чтение теории, С. 492–495 решение задач; С. 495–511 чтение теории, С. 511–512 решение задач.
2. Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу : учебное пособие для вузов / Б.П. Демидович. – М. : Наука, 1990. – 624 с. – ISBN 5-02-014505-X: С. 318 чтение теории, С. 318–324 решение задач; С. 324–325 чтение теории, С. 326–338 решение задач; С. 338–339 чтение теории, С. 339–348 решение задач; С. 348–349 чтение теории, С. 349–361 решение задач; С. 361–362 чтение теории, С. 362–367 решение задач; С. 367–368 чтение теории, С. 368–370 решение задач.

Тема 20. *Исследование экстремумов числовых функций с помощью правила множителей Лагранжа.*
С темой можно ознакомиться в следующих источниках:
1. Зорич, В.А. Математический анализ : учебник для ун-тов. Ч. 1 / В.А. Зорич. – М. : Наука, 1981. – 544 с.: С. 512–532 чтение теории, С. 533–535 решение задач.
2. Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу : учебное пособие для вузов / Б.П. Демидович. – М. : Наука, 1990. – 624 с. – ISBN 5-02-014505-X: С. 370–371 чтение теории, С. 371–378 решение задач.

Контрольные вопросы по разделу

1. Сформулировать определение шаровой окрестности точки пространства R^n.
2. Сформулировать определение предельной точки множества D точек пространства R^n.
3. Сформулировать определение непрерывной кривой в пространстве R^n.
4. Сформулировать теорему Жордана о функциях ограниченной вариации.
5. Сформулировать определение «по Коши» предела функции $u(M)$ в точке M_0 из R^n.
6. Сформулировать определение «по Гейне» предела функции $u(M)$ в точке M_0 из R^n.
7. Сформулировать определение непрерывной функции $u(x, y)$ по переменной x в точке $M_0(x_0, y_0)$.
8. Сформулировать определение дифференцируемой функции в точке пространства R^n, частных производных первого и второго порядка этой функции и ее дифференциала.
9. Сформулировать теорему о необходимых условиях дифференцируемости $u(x, y)$ в точке.
10. Сформулировать теорему о достаточных условиях дифференцируемости $u(x, y)$ в точке.
11. Сформулировать определение локального экстремума функции многих переменных.
12. Сформулировать определение стационарных точек функции многих переменных.
13. Сформулировать определение критических точек функции многих переменных.

14. Сформулировать теорему о необходимых условиях локального экстремума функции n переменных.
15. Сформулировать теорему о достаточных условиях локального экстремума функции n переменных.
16. Сформулировать алгоритм поиска локального экстремума функции n переменных.
17. Сформулировать правило множителей Лагранжа.

Задачи для самостоятельной работы по разделу

1. Найти все граничные и предельные точки множества точек на плоскости:

а) $\{(x,y): x^2+y^2<1\}$; б) $\left\{\left(\cos\frac{\pi}{n}, \sin\frac{\pi}{n}\right), n\in N\right\}$.

2. Определить и изобразить области существования следующих функций:

а) $z=\sqrt{\ln(x+y)}$; б) $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$; в) $z=\sqrt{\sin\pi(x^2+y^2)}$; г) $z=(x+\sqrt{y})\cdot\ln(y^2-x^2)$;

д) $z=\arccos\frac{x}{y}$ е) $z=\ln x+\ln\cos y$; ж) $z=\frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{\ln x}$; з) $z=\frac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$.

3. Вычислить пределы функций:

а) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sqrt{1+x^2y^2}-1}{x^2+y^2}$; б) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\sin\left(x^4y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$; в) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1-\cos\left(x^2+y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)x^2y^2}$; г) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}}\left(x^2+y^2\right)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$

4. Исследовать функции на непрерывность и определить точки разрыва, если они имеются

а) $z=\frac{x-y^2}{x+y^2}$; б) $z=\cos\frac{1}{x+y}$; в) $z=\frac{1}{\sin^2\pi x+\sin^2\pi y}$; г) $z=\frac{1}{\sin\pi x}+\frac{1}{\sin\pi y}$; д) $z=\left[\frac{y}{x}\right]$.

5. Найти частные производные первого, второго порядка, а также дифференциалы первого, второго порядка от данных функций:

а) $z=x\ln y$; б) $z=\ln\mathrm{tg}(x+y)$; в) $z=x\sin xy+y\cos xy$; г) $z=\arcsin xy$; д) $z=x^{\ln y}$;

е) $z=\frac{x-y}{x+y}$; ж) $z=\frac{x}{x-y}$; з) $z=\ln\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$; и) $z=\ln\left(e^x+y\right)$; к) $z=\cos\left(x-e^y\right)$.

6. Найти все точки локального экстремума функций:

а) $z=x^3+y^3-3xy$; б) $z=xy+\frac{8}{x}+\frac{8}{y}$; в) $z=(5-2x+y)e^{x^2-y}$; г) $z=x^2+y^2-z^2$;

д) $z=xyz(4-x-y-z)$; е) $z=x^2+y^2+z^2-2xy-2xz-2yz$; ж) $z=x+\frac{y^2}{4x}+\frac{z^2}{y}+\frac{2}{z}$.

6) Раздел 6. Интегралы, зависящие от параметра

Тема 21. *Семейства функций, зависящих от параметра.*
С темой можно ознакомиться в следующих источниках:
1. Зорич, В.А. Математический анализ : учебник для ун-тов. Ч. 2 / В.А. Зорич. – М. : Наука, 1984. – 640 с.: С. 358–363 чтение теории, С. 363 решение задач.

Тема 22. *Собственный интеграл, зависящий от параметра.*
С темой можно ознакомиться в следующих источниках:
1. Зорич, В.А. Математический анализ : учебник для ун-тов. Ч. 2 / В.А. Зорич. – М. : Наука, 1984. – 640 с.: С. 400–406 чтение теории, С. 406–407 решение задач.
2. Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу : учебное пособие для вузов / Б.П. Демидович. – М. : Наука, 1990. – 624 с. – ISBN 5-02-014505-X: С. 379 чтение теории, С. 380–385 решение задач.

Тема 23. *Несобственный интеграл, зависящий от параметра.*
С темой можно ознакомиться в следующих источниках:
1. Зорич, В.А. Математический анализ : учебник для ун-тов. Ч. 2 / В.А. Зорич. – М. : Наука, 1984. – 640 с.: С. 407–425 чтение теории, С. 425–428 решение задач; С. 428–435 чтение теории, С. 435–439 решение задач.
2. Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу : учебное пособие для вузов / Б.П. Демидович. – М. : Наука, 1990. – 624 с. – ISBN 5-02-014505-X: С. 385–386 чтение теории, С. 386–391 решение задач; С. 392 чтение теории, С. 392–400 решение задач; С. 400 чтение теории, С. 400–403 решение задач.

Контрольные вопросы по разделу

1. Сформулировать определение равномерной сходимости семейства функций, зависящего от параметра.
2. Сформулировать теорему о непрерывности собственного интеграла, зависящего от параметра.
3. Сформулировать теорему об интегрировании по параметру собственного интеграла, зависящего от параметра.
4. Сформулировать теорему о дифференцировании по параметру собственного интеграла, зависящего от параметра.
5. Сформулировать определение равномерной сходимости несобственного интеграла первого рода, зависящего от параметра.
6. Сформулировать определение равномерной сходимости несобственного интеграла второго рода, зависящего от параметра.
7. Сформулировать критерий Коши равномерной сходимости несобственного интеграла первого рода, зависящего от параметра.
8. Сформулировать критерий Коши равномерной сходимости несобственного интеграла второго рода, зависящего от параметра.
9. Указать области равномерной сходимости для гамма-функции $\Gamma(p)$.
10. Написать формулу для бета-функции $\mathrm{B}(p,q)$ в виде несобственного интеграла. Найти область сходимости.

Задачи для самостоятельной работы по разделу

1. Доказать, что функция $f(p)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(px)}{1+x^2}dx$ непрерывна при всех вещественных p.

2. Найти $f'(p)$, если

а) $f(p)=\int\limits_{\sin p}^{\cos p} e^{p\sqrt{1-x^2}}dx$; б) $f(p)=\int\limits_{a+p}^{b+p}\frac{\sin px}{x}dx$; в) $f(p)=\int\limits_{0}^{p}\frac{\ln(1+px)}{x}dx$.

3. Применяя методы дифференцирования или интегрирования по параметру, вычислить собственные интегралы:

а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{arctg}(p\operatorname{tg}x)}{\operatorname{tg}x}dx$; б) $\int\limits_0^{\pi} \ln\left(1-2p\cos x+p^2\right)dx$; в) $\int\limits_0^1 \frac{x^b-x^a}{\ln x}dx,\ a,b>0$.

4. Исследовать несобственные интегралы на равномерную сходимость:
а) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^p}dx,\ p\in[a\,;+\infty),\ a>0$; б) $\int\limits_1^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}e^{-px}dx,\ p\in[0\,;+\infty)$; в) $\int\limits_0^1 \frac{x^p}{\sqrt{1-x}}dx,\ p\in[0\,;+\infty)$.

5. Применяя методы дифференцирования или интегрирования по параметру, вычислить несобственные интегралы:
а) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x}dx,\ a,b>0$; б) $\int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\right)^2 dx,\ a,b>0$; в) $\int\limits_0^1 \frac{\ln\left(1-a^2x^2\right)}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx,\ |a|<1$.

6. С помощью эйлеровых интегралов вычислить:
а) $\int\limits_0^1 \sqrt{x-x^2}dx$; б) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt[5]{x}}{(1+x)^2}dx$; в) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$; г) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2dx}{1+x^4}$; д) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x\cos^4 x dx$; е) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1-x^n}}$ при $n>1$; ж) $\int\limits_0^{+\infty} x^{2n}e^{-x^2}dx,\ n\in N$.

7) Раздел 7. Кратные и криволинейные интегралы

Тема 24. *Двойные и тройные интегралы.*
С темой можно ознакомиться в следующих источниках:
1. Зорич, В.А. Математический анализ : учебник для ун-тов. Ч. 2 / В.А. Зорич. – М. : Наука, 1984. – 640 с.: С. 113–122 чтение теории, С. 122–123 решение задач; С. 123–126 чтение теории, С. 126–127 решение задач; С. 127–130 чтение теории, С. 130–131 решение задач; С. 131–138 чтение теории, С. 138–139 решение задач; С. 139–152 чтение теории, С. 152–153 решение задач.
2. Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу : учебное пособие для вузов / Б.П. Демидович. – М. : Наука, 1990. – 624 с. – ISBN 5-02-014505-X: С. 406 чтение теории, С. 407–416 решение задач; С. 416 чтение теории, С. 417–419 решение задач; С. 419 чтение теории, С. 419–421 решение задач; С. 421 чтение теории, С. 421–424 решение задач; С. 424–425 чтение теории, С. 425–431 решение задач; С. 431–432 чтение теории, С. 432–435 решение задач.
3. Виноградова, И.А. Математический анализ в задачах и упражнениях : учебное пособие для вузов / И.А. Виноградова, С.Н. Олехник, В.А. Садовничий. – М. : МГУ, 1991. – 352 с. – ISBN 5-211-01559-2: С. 5–127 чтение теории, С. 127–183 решение задач.

Тема 25. *Криволинейные и поверхностные интегралы.*
С темой можно ознакомиться в следующих источниках:
1. Зорич, В.А. Математический анализ : учебник для ун-тов. Ч. 2 / В.А. Зорич. – М. : Наука, 1984. – 640 с.: С. 213–223 чтение теории, С. 223–227 решение задач; С. 227–234 чтение теории, С. 235–236 решение задач; С. 236–249 чтение теории, С. 249–252 решение задач.
2. Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу : учебное пособие для вузов / Б.П. Демидович. – М. : Наука, 1990. – 624 с. – ISBN 5-02-014505-X: С. 443–444 чтение теории, С. 444–452 решение задач; С. 452 чтение теории, С. 452–459 ре-

шение задач; С. 460–461 чтение теории, С. 461–464 решение задач; С. 464 чтение теории, С. 465–466 решение задач; С. 466 чтение теории, С. 466–471 решение задач.
3. Виноградова, И.А. Математический анализ в задачах и упражнениях : учебное пособие для вузов / И.А. Виноградова, С.Н. Олехник, В.А. Садовничий. – М. : МГУ, 1991. – 352 с. – ISBN 5-211-01559-2: С. 184–205 чтение теории, С. 205–219 решение задач; С. 220–319 чтение теории, С. 319–352 решение задач.

Контрольные вопросы по разделу

1. Сформулировать определение кратного интеграла.
2. Сформулировать, в чем заключается метод замены переменной в двойном интеграле.
3. Сформулировать, в чем заключается геометрическое приложение кратных интегралов с примерами.
4. Сформулировать определение криволинейного интеграла первого рода.
5. Сформулировать определение криволинейного интеграла второго рода.
6. Связь криволинейного интеграла с двойным. Формула Грина.
7. Сформулировать определение поверхностного интеграла первого рода.
8. Сформулировать определение поверхностного интеграла второго рода.
9. Доказать теорему о формуле Стокса.
10. Доказать теорему о формуле Остроградского-Гаусса.

Задачи для самостоятельной работы по разделу

1. Вычислить двойной интеграл по области интегрирования D:

а) $\iint\limits_D \left(12x^2y^2+16x^3y^3\right)dxdy$, $D: x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt{x}$;

б) $\iint\limits_D \left(8xy+9x^2y^2\right)dxdy$, $D: x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^3$;

в) $\iint\limits_D ye^{5xy}dxdy$, $D: y=\ln 2,\ y=\ln 3,\ x=2,\ x=4$;

г) $\iint\limits_D x^2\cos xydxdy$, $D: y=\dfrac{\pi}{2},\ y=\pi,\ x=2,\ x=3$;

д) $\iint\limits_D y\sin xydxdy$, $D: y=\pi,\ y=2\pi,\ x=0.5,\ x=1$;

е) $\iint\limits_D y^2e^{-xy}dxdy$, $D: x=0,\ y=4,\ y=2x$.

2. Вычислить тройной интеграл по области интегрирования V:

а) $\iiint\limits_V 2y^2e^{xy}dxdydz$, $V: \begin{cases} x=0,\ y=1,\ y=x, \\ z=0,\ z=1. \end{cases}$ б) $\iiint\limits_V x^2z\sin(xyz)dxdydz$, $V: \begin{cases} x=2,\ y=\pi,\ z=1, \\ x=0,\ y=1,\ z=0. \end{cases}$

в) $\iiint\limits_V y^2\cos\left(\dfrac{\pi}{4}xy\right)dxdydz$, $V = \begin{cases} x=0,\ y=-1,\ y=\dfrac{x}{2}, \\ z=0,\ z=-\pi^2. \end{cases}$

г) $\iiint\limits_V y^2z\operatorname{ch}\left(\dfrac{xyz}{2}\right)dxdydz$, $V: \begin{cases} x=2,\ y=-1,\ z=2, \\ x=0,\ y=0,\ z=0. \end{cases}$

д) $\iiint\limits_V x^2\sin(\pi xy)dxdydz$, $V: \begin{cases} x=2,\ y=\dfrac{x}{2},\ y=0, \\ z=0,\ z=8\pi. \end{cases}$

е) $\iiint\limits_V x^2 z\,\mathrm{sh}(xyz)dxdydz,\ V:\begin{cases} x=2,\ y=1,\ z=2, \\ x=0,\ y=0,\ z=0 \end{cases}$

3. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями:

а) $x^2+y^2=2,\ y=\sqrt{x},\ y=0,\ z=0,\ z=10x$;
б) $x+y=4,\ y=\sqrt{2x},\ \ z=3y,\ z=0$;
в) $x^2+y^2=2y,\ z=2.25-x^2,\ z=0$;
г) $x^2+y^2=10x,\ x^2+y^2=13x,\ z=\sqrt{x^2+y^2},\ z=0,\ y=0,\ y\ge 0$;
д) $x^2+y^2+4x=0,\ z=8-y^2,\ z=0$; е) $x^2+y^2=2\sqrt{2}x,\ z=x^2+y^2-4,\ z=0,\ z\ge 0$.

4. Вычислить криволинейные интегралы:
а) $\int\limits_C (x+y)ds,$ где C – контур треугольника с вершинами O(0, 0), A(1, 0) и B(0, 1);
б) $\int\limits_C y^2 ds,$ где C – дуга окружности $x=a\cos t,\ y=a\sin t$ при $0\le t\le \frac{\pi}{2}$;
в) $\int\limits_C xyds,$ где C – дуга гиперболы $x=a\mathrm{ch}t,\ y=a\mathrm{sh}t$ при $0\le t\le t_0$;
г) $\int\limits_C (x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy,$ где C – парабола $y=x^2$ при $-1\le x\le 1$;
д) $\int\limits_C (x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy,$ где C – кривая $y=1-|1-x|$ при $0\le x\le 2$;
е) $\int\limits_C (2a-y)dx+xdy,$ где C – арка циклоиды $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)$ при $0\le t\le 2\pi$.

5. Вычислить поверхностные интегралы:
а) $\iint\limits_S (x+y)dS$, где S – часть плоскости $2x+4y+z=10,$ лежащая в первом октанте;
б) $\iint\limits_S zdS$, где S – часть поверхности $x^2+z^2=2az,\ a>0,$ вырезанная поверхностью $z=\sqrt{x^2+y^2}$;
в) $\iint\limits_S (x+y+z)dS$, где S – поверхность $x^2+y^2+z^2=a^2,\ z\ge 0$;
г) $\iint\limits_S (xdydz+ydzdx+zdxdy)$, где S – внешняя сторона сферы $x^2+y^2+z^2=a^2$;
д) $\iint\limits_S (y-z)dydz+(z-x)dzdx+(x-y)dxdy$, где S – внешняя сторона конической поверхности $x^2+y^2=z^2,\ 0\le z\le h$;
е) $\iint\limits_S x^2dydz+y^2dzdx+z^2dxdy$, S – внешняя сторона сферы $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$
.